

[This question paper contains 8 printed pages.]

Sr. No. of Question Paper : 2255

F-4

Your Roll No.....

Unique Paper Code : 2271202

Name of the Course : B.A. (H) Economics

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics-II

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. All questions are compulsory.
3. Use of simple calculator is allowed.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
3. साधारण कैलकुलेटर का प्रयोग मान्य है।
4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Answer any four of the following:

(a) Prove:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

where u and v are two non-zero vectors.

(b) Find the equation of the plane through $(1, 1, -1)$ and perpendicular to the line $(x, y, z) = (4 - 3t, 2 + t, 6 + 5t)$.

(c) The adjoint of a 2×2 matrix A is C . Prove that

(i) $CA = [\det(A)] I$

P.T.O.

(ii) Adjoint of $A^T = C^T$

(d) Express the following matrix as a sum of a symmetric and a skew symmetric matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(e) State and check the Cauchy-Schwarz inequality for the following vectors:

$$x = (4, -2, 3) \text{ and } y = (-3, 2, 5). \quad (3 \times 4)$$

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए,

(क) दर्शाये, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

जहाँ u एवं v दो गैर शून्य सदिश हैं।

(ख) $(1, 1, -1)$ से गुजरती हुई एवं रेखा के $(x_1, x_2, x_3) = (4 - 3t, 2 + t, 6 + 5t)$ के लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ग) C एक 2×2 आव्यूह A का अडजॉइंट है। दर्शाये कि,

$$(i) CA = [\det(A)] I$$

$$(ii) \text{Adjoint of } A^T = C^T$$

(घ) निम्नलिखित आव्यूह को सममित एवं तिरछा सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

(ङ) निम्नलिखित सदिशों के लिये कॉची-श्वार्ज असमानता की लिखकर जाँच कीजिए।

$$x = (4, -2, 3) \text{ and } y = (-3, 2, 5).$$

2. Answer any three of the following

- (a) A country is divided into three regions 1, 2, 3. The proportions of the populations of these three regions that stay put or migrate to another region are given in terms of the transition matrix $P = [p_{ij}]$. The entry P_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, denotes the proportion of the population of region j moving to region i . Construct the transition matrix on the basis of the following : 80% of the population of region 1 stays put, 10% goes to region 2, 10% goes to region 3; 70% of the population of region 2 stays put, 15% goes to region 1, 15% goes to region 3; 90% of the population of region 3 stays put, 5% goes to region 1, 5% goes to region 2.

Hence find the populations of these regions at the beginning of the next period and after two period if the initial population vector is given by

$$x^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- (b) Write the vector $w = (1, 1, 1)$ as a linear combination of vectors in the set $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$.
- (c) Find the equation of the line formed at the intersection of the following planes:
- $$x + y - z = 4$$
- $$x + 2y + z = 3$$
- (d) Computer the rank of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hence solve the following system of equations, if possible:

$$7x - y - z = 0$$

$$10x - 2y + z = 8$$

$$6x + 3y - 2z = 7 \quad (5 \times 3)$$

P.T.O.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए।

- (क) एक देश तीन क्षेत्रों 1,2,3 में विभाजित हैं इन तीनों क्षेत्रों में जनसंख्या के रहने या एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र में विस्थापित होने का अनुपात संक्रमण आव्यूह $P=[p_{ij}]$ के रूप में दिया गया है। प्रविष्टि p_{ij} , $i, j = 1,2,3$ क्षेत्र j से क्षेत्र i में विस्थापित जनसंख्या अनुपात को इंगित करती है। निम्नलिखित जानकारी के आधार पर संक्रमण आव्यूह का निर्माण कीजिए। 80 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र 1 में ही रहती है जबकि 10-10 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र-2 एवं क्षेत्र-3 में चली जाती है। 70 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र-2 में रहती है जबकि 15-15 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र-1 एवं क्षेत्र-3 में चली जाती है। 90 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र-3 में रहती है जबकि 5-5 प्रतिशत जनसंख्या क्षेत्र-1 एवं क्षेत्र-2 में चली जाती है।

यदि आरम्भिक जनसंख्या सदिश $x^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$ दिया है तो इन क्षेत्रों की शुरुआत से अगले वर्ष एवं

उसके दो वर्ष बाद जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

- (ख) सदिश $w = (1,1,1)$ को सदिशों के समुच्चय $S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-1,0,1)\}$ के एक रेखीय संयोजन के रूप में लिखिए।
- (ग) निम्नलिखित समतलों के प्रतिच्छेदन से बनने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$x + y - z = 4$$

$$x + 2y + z = 3$$

- (घ) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिए।

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

यदि संभव है तो निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$7x - y - z = 0$$

$$10x - 2y + z = 8$$

$$6x + 3y - 2z = 7$$

3. Answer any three of the following

(a) Find the domain of the following function: $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$

Hence sketch the domain in the xy - plane.

(b) Suppose $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the length of the diagonal of a rectangle whose sides are x and y that are allowed to vary. Find a formula for the rate of change of D with respect to x if x varies with y constant. Use this formula to find the rate of change of D with respect to x at the point $(3, 4)$.

(c) Find the slope of the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in the y direction at the points

$$A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ and } B = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right). \text{ Assume that } z \text{ is implicitly defined.}$$

Where are the two points A and B located on the given surface?

(d) The demand for goods 1 and 2 are given by

$$q_1 = p_1^{-1.7} p_2^{0.8} \text{ and } q_2 = p_1^{0.5} p_2^{-0.2}$$

Calculate the cross-price elasticities of the demand. (3×3)

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए:

(क) फलन $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ का परास ज्ञात कीजिए। xy -समतल पर परास का रेखाचित्र भी बनायें।

(ख) माना $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ एक आयात के विकर्ण की लंबाई है जिसकी भुजायें x एवं y हैं जोकि परिवर्तनशील हैं। यदि x परिवर्तनशील एवं y स्थिर है तो x के सापेक्ष D में परिवर्तन की दर का सूत्र ज्ञात कीजिए। इस सूत्र का प्रयोग करते हुए बिन्दु $(3,4)$ पर x के सापेक्ष D में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(ग) बिन्दुओं $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ एवं $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ पर y की दशा में सहत (पृष्ठ) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का ढाल ज्ञात कीजिए। माना कि z निहितार्थ परिभाषित है। दी हुयी सतह पर दो बिन्दु A एवं B कहाँ पर स्थित हैं?

(घ) वस्तु-1 एवं वस्तु-2 के निम्नलिखित माँग फलन दिये हैं,

$$q_1 = p_1^{-1.7} p_2^{0.8} \text{ and } q_2 = p_1^{0.5} p_2^{-0.2}$$

माँग की तिरछी कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

4. Answer any three of the following

(a) Sketch the level curves for the following functions

(i) $f(x,y) = 2 - x - y$ at heights $k = -2, 2$.

(ii) $f(x,y) = y^2 - x^2$ at height $k = 0$.

(b) Find the equation to the tangent plane at the point $(2, 1, 4)$ to the graph of $f(x,y) = x^2y$. Also, find the equation of the normal line to the surface at this point.

(c) If $u = ze^{ax+by}$, where z is a homogenous function in x and y of degree n , then

prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (ax + by + n)u$.

(d) For the function $(x,y) = x^2y^3 - 4y$, find the gradient at the point $(2, -1)$. Hence find the directional derivative in the direction of the unit vector

$$v = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right) \quad (4 \times 3)$$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए:

(क) निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र बनायें

(i) $f(x,y) = 2 - x - y$ at heights $k = 2, 2$.

(ii) $f(x,y) = y^2 - x^2$ at height $k = 0$.

(ख) बिन्दु $(2, 1, 4)$ एवं ग्राफ $f(x,y) = x^2y$ को स्पर्श करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु पर पृष्ठ के लिये प्रसामान्य रेखा भी ज्ञात कीजिए।

(ग) यदि $u = ze^{ax+by}$ जहाँ z , x एवं y में कोटि n का एक समरूप फलन है तो दर्शायें,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (ax + by + n)u$$

(घ) फलन $(x,y) = x^2y^3 - 4y$ के लिये बिन्दु $(2, -1)$ पर ढाल ज्ञात कीजिए। इकाई सदिश $v =$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right) \text{ की दिशा में दिशात्मक अवकलज भी ज्ञात कीजिए।}$$

5. Answer any three of the following

(a) Let $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$. Locate all extrema and saddle points.

(b) A firm produces its outputs x_1 and x_2 in two plants under the following cost conditions:

$$c_1 = 10x_1$$

$$c_2 = 0.25x_2^2$$

The demand for its total output is $x_1 + x_2 = 200 - 2p$.

Find the levels of outputs to be produced in the two plants that maximize the joint profit. Also, find the price p at which profit is maximized and the value of the maximum profit.

(c) Determine the definiteness of the following quadratic forms:

$$(i) q(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$(iii) q(u,v) = 2u^2 - 4uv + v^2 \text{ s.t. } 3u + 4v = 0$$

(d) Check the concavity / convexity of the following functions:

$$(i) f(x,y) = xy$$

$$(ii) f(x,y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 4y + 1 \quad (5 \times 3)$$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन का उत्तर दीजिए:

(क) माना $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$ है। सभी चरम एवं उदासीन (परिवृद्ध) बिन्दुओं का पता लगायें।

(ख) निम्नलिखित लागत शर्तों के अन्तर्गत एक फर्म दो प्लांटों में x_1 एवं x_2 का उत्पादन करती है।

$$c_1 = 10x_1$$

$$c_2 = 0.25x_2^2$$

$$x_1 + x_2 = 200 - 2p \text{ उसके कुल उत्पादन की मांग है।}$$

संयुक्त लाभ को अधिकतम करने के लिए दोनों प्लांटों से उत्पादित के स्तरों की गणना कीजिए। लाभ अधिकतमीकरण कीमत एवं अधिकतम लाभ मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

(ग) निम्नलिखित द्विघात पदों की निश्चितता का परीक्षण कीजिए,

$$(i) q(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$(ii) q(u,v) = 2u^2 - 4uv + v^2 \text{ s.t. } 3u + 4v = 0$$

(घ) निम्नलिखित फलनों की उत्तलता/अवतलता की जाँच कीजिए।

$$(i) f(x,y) = xy$$

$$(ii) f(x,y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 4y + 1$$

6. Answer any two of the following:

(a) Find the maximum and minimum values of the function

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

on the closed bounded set $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

(b) Maximise $f(x,y) = 100\ln x + 50\ln y$, where $x > 0, y > 0$

subject to $3x + y = 10$.

(c) An individual has a utility function $u = q_1 q_2$ based on the two commodities purchased q_1 and q_2 . The prices for these are p_1 and p_2 respectively, while his total income is M . Construct an optimization problem by using the Lagrange method. How much of each commodity should he purchase in order to attain maximum utility? (6×2)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए:

(क) परिवर्द्ध समुच्चय $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$. पर आधारित फलन $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

(ख) अधिकतम $f(x,y) = 100\ln x + 50\ln y$, जहाँ $x > 0, y > 0$

यदि $3x + y = 10$ ।

(ग) एक व्यक्ति का दो वस्तुओं q_1 एवं q_2 की खरीद पर आधारित उपयोगिता फलन $u = q_1 q_2$ है। जिनकी कीमतें क्रमशः p_1 एवं p_2 हैं तथा कुल आय M है। लैग्रांज विधि का प्रयोग करके एक अनुकूलतम समस्या का निर्माण कीजिए। अधिकतम उपयोगिता प्राप्त करने के लिए प्रत्येक वस्तु की कितनी मात्रा खरीदनी चाहिए।