

This question paper contains 8 printed pages.]

Your Roll No.:

6322

B.A. (Hons.) / I

B

ECONOMICS : Paper 02

(Mathematical Methods for Economics)

(Admissions of 2005 onwards)

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 38

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note : Answers may be written *either* in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

1. (a) Fill in the blanks with "if", "only if", or "if and only if".

X is an integer _____ $X \in \mathbb{R}$.

Matrix A is non-singular _____ A^{-1} exists.

$X^2 > 16$ _____ $x > 4$

$3x + 8 \geq 17$ _____ $x \geq 1$

- (b) Find the equation of the circle that is tangent to both the x and y axes with a radius of 4 and whose centre is located in the second quadrant.

- (c) Let $f(x) = (x - 1)/(x + 5)$ and $g(x) = 1/(x + 3)$.

Find the domain of $f \circ g$.

(क) “यदि”, “केवल यदि” या “यदि और केवल यदि” द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

X एक पूर्णांक है _____ $X \in \mathbb{R}$

मैट्रिक्स A एक व्यापी नहीं है _____ A^{-1} विद्यमान है

$X^2 > 16$ _____ $x > 4$

$3x + 8 \geq 17$ _____ $x \geq 1$

(ख) वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो त्रिज्या 4 वाले x और y दोनों अक्षों पर स्पर्शी है और जिसका केंद्र दूसरे चतुर्थांश में स्थित है ।

(ग) मान लीजिए कि $f(x) = (x - 1)/(x + 5)$ और $g(x) = 1/(x + 3)$ $f \circ g$ का डोमेन ज्ञात कीजिए ।

OR/अथवा

(a) Find all values of b and c so that the quadratic function $f(x) = x^2 + bx + c$ has a graph that is tangent to the x-axis and has a y intercept (0, 4). 3

(b) Find the domain of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+4} & \text{if } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{3}{x-3}} & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad 3$$

(c) Solve the logarithmic equation defined by : $\log(2x - 2) + \log(4x - 3) = 2 \log(2x)$ 2

(क) b और c के सभी मानों को ज्ञात कीजिए ताकि द्विघाती फलन $f(x) = x^2 + bx + c$ का ग्राफ बने जो कि x-अक्ष पर स्पर्शी है और y अपरोधन (0, 4) है ।

(ख) फलन का डोमेन ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+4} & \text{if } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{3}{x-3}} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

(ग) $\log(2x - 2) + \log(4x - 3) = 2 \log(2x)$ द्वारा परिभाषित लघुगणकीय समीकरण को हल कीजिए ।

2. (a) The quantity of a commodity supplied to the market when the selling price is P , is believed to take the form

$$Q = aP^2 + bP + c/P$$

For some constants a, b, c for $P > 1$.

It is known that when $P = 1$, the quantity supplied is, $Q = 2$; when $P = 2$,

$Q = 19/2$; and when $P = 3$, $Q = 62/3$.

Write a system of three linear equations in the unknowns a, b and c . Use Cramer's Rule to find a, b and c .

- (b) Determine the conditions (if any) on α, β and δ , in order for the following system to be consistent when :

(i) $a \neq 3$?

(ii) $a = 3$?

$$x + 3y - 2z = \alpha$$

$$-x - 5y + 3z = \beta$$

$$2x - 8y + az = \delta$$

- (क) जब विक्रय कीमत P है तब बाजार में दी गई वस्तु की मात्रा इस रूप को ले लेती है :

$$Q = aP^2 + bP + c/P$$

कुछ के लिए a, b, c स्थिरांक $P > 1$ के लिए हैं ।

यह जानते हैं कि जब $P = 1$, दी गई मात्रा $Q = 2$;

जब $P = 2$, $Q = 19/2$ और जब $P = 3$, $Q = 62/3$

a, b और c अज्ञातों में तीन रेखिक समीकरणों की प्रणाली को लिखिए । a, b और c को ज्ञात करने के लिए क्रैमर-नियम का प्रयोग कीजिए ।

- (ख) α, β और δ पर दशाओं का (यदि कोई हैं) निर्धारण क्रम में निम्नलिखित प्रणाली के लिए कीजिए जिससे वह संगत हो जाए जब

(i) $a \neq 3$?

(ii) $a = 3$?

$$x + 3y - 2z = \alpha$$

$$-x - 5y + 3z = \beta$$

$$2x - 8y + az = \delta$$

OR/अथवा

- (a) Prove that the inverse of a symmetric matrix is symmetric. 3
- (b) Is the product of two symmetric matrices necessarily symmetric? 1
- (c) In the following system of equations, determine the number of degrees of freedom (and superfluous equations) for different values of α and β .

$$x - 3y + 4z = 0$$

$$2x - y - 2z = 5$$

$$5x - 2y - \alpha z = \beta$$

4

- (क) सिद्ध कीजिए कि सममित मैट्रिक्स का व्युत्क्रम सममित होता है।
- (ख) क्या दो सममित मैट्रिक्सों का उत्पाद अनिवार्यतः सममित होता है?
- (ग) समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली में α और β के विभिन्न मानों के लिए स्वतंत्रता की कोटियों की संख्या (और अधिकाधिक समीकरणों) का निर्धारण कीजिए :

$$x - 3y + 4z = 0$$

$$2x - y - 2z = 5$$

$$5x - 2y + \alpha z = \beta$$

3. (a) f and g are two continuous functions in (a, b) such that $f(a) > g(a)$ and $f(b) < g(b)$. Prove the existence of c within (a, b) such that $f(c) = g(c)$. 3
- (b) Land bought for investment purposes is increasing in value according to the formula

$$V(t) = 1000 e^{3\sqrt{t}}$$

The rate of interest under continuous compounding is 9%. How long should the land be held to maximise the present value? (Assume zero upkeep costs) 5

- (क) f और g दो सतत फलन (a, b) में इस प्रकार हैं कि $f(a) > g(a)$ और $f(b) < g(b)$ । (a, b) के भीतर c के विद्यमान होने को सिद्ध कीजिए ताकि $f(c) = g(c)$
- (ख) निवेश के उद्देश्य से खरीदी गई ज़मीन का मूल्य इस सूत्र के अनुसार बढ़ रहा है :

$$V(t) = 1000 e^{3\sqrt{t}}$$

सतत चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर्गत ब्याज की दर 9% है। वर्तमान मूल्य को अधिकतम करने के लिए ज़मीन को कब तक अपने पास रखना चाहिए ? (रखरखाव लागत शून्य मानिए)।

OR/अथवा

- (a) Determine all the values of x which satisfy the conclusions of the Lagrange Mean Value Theorem for the following function :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \text{ on } [-1, 2] \quad 3$$

- (b) The functions f and g are both concave and F is the composite function defined by

$$F(x) = f[g(x)]$$

Show that if f is an increasing function, then F is also concave.

(Do not assume that f and g are differentiable). 3

- (c) A firm experiences a 10% increase in the use of inputs at a time when input costs are rising by 3%. What is the proportional rate of increase in total input cost ? 2

- (क) x के समस्त मानों का निर्धारण कीजिए जो निम्नलिखित फलन के लिए लैंगरेंज माध्य मान प्रमेय के निष्कर्ष को संतुष्ट करें :

$$[-1, 2] \text{ पर } f(x) = x^3 + 2x^2 - x$$

- (ख) f और g के फलन दोनों अवतल हैं और F संयुक्त फलन है जिसको इसके द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$F(x) = f[g(x)]$$

प्रदर्शित कीजिए कि यदि f वर्धमान फलन है तो F भी अवतल है। (यह नहीं मानें कि f और g अवकलनीय हैं)

- (ग) एक फर्म ऐसे समय निवेशों के प्रयोग में 10% वृद्धि देखती है जब निवेश की लागतें 3% बढ़ रही हैं। कुल निवेश लागत में वृद्धि की आनुपातिक दर क्या है ?

4. (a) Find the stationary value(s) of the following function and determine whether they are local maxima, minima or saddle points.

$$f(x, y) = e^{(2x^2 - 12x - 2xy + y^2 - 4y)}$$

4

- (b) The function g is defined by

$$g(x, y) = f(x, y) - a \log(x + y)$$

where a is a constant and f satisfies the condition

$$xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = a \text{ for all } (x, y).$$

Use Euler's theorem to show that g is homogenous of degree 0.

4

- (क) निम्नलिखित फलन का स्थायी मान (स्थायी मानों को) ज्ञात कीजिए और निर्धारित कीजिए कि ये स्थानीय उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ अथवा पल्याण बिंदु हैं।

$$f(x, y) = e^{(2x^2 - 12x - 2xy + y^2 - 4y)}$$

- (ख) g के फलन को इसके द्वारा परिभाषित किया जाता है :

$$g(x, y) = f(x, y) - a \log(x + y)$$

जिसमें a स्थिरांक है और f निम्न दशा को संतुष्ट करता है :

$$xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = a \text{ सभी } (x, y) \text{ के लिए।}$$

यूलर प्रमेय का प्रयोग करके प्रदर्शित कीजिए कि g कोटि 0 का समरूप है।

OR/अथवा

- (a) Let $f(x, y) = x^2y$.
Find the first and second directional derivatives of f in the direction of $(1, 2)$ at the point $(3, 2)$.

4

- (b) A firm has a production function given by

$$Q = AK^{3/4} L^{1/2}$$

Where Q = output

K = capital input

L = labour input

Show that there are diminishing marginal returns to each factor input. Determine the slope of the isoquants associated with this production function. Are the isoquants concave or convex ?

4

- (क) मान लीजिए कि $f(x, y) = x^2y$
बिंदु $(3, 2)$ पर $(1, 2)$ के निर्देश में f के प्रथम और द्वितीय निर्देशी व्युत्पन्नो को ज्ञात कीजिए ।
- (ख) एक फर्म का उत्पादन फलन इससे ज्ञात होता है :

$$Q = AK^{3/4} L^{1/2}$$

जिसमें Q = उत्पादन

K = पूँजी निवेश

L = श्रम निवेश

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक कारक निवेश का हासमान सीमांत प्रतिफल होता है । इस उत्पादन फलन से संबंधित समोत्पादों के ढाल का निर्धारण कीजिए । समोत्पाद अवतल हैं या उत्तल ?

5. Anjali's utility function is :

$U = 3 \log x + 2 \log y$, where x and y are weekly consumption levels of goods x and y . The market prices are $P_x = ₹ 2$ and $P_y = ₹ 1$, and her weekly budget is $B = ₹ 100$

- (a) Find the quantities that Anjali should buy each week in order to maximize her utility.

- (b) Aditya's utility function is $u = x^3 y^2$. His weekly budget is also ₹ 100 and he buys in the same markets as Anjali and therefore faces the same prices. Without further calculations can you state the quantities that Aditya will buy in order to maximize his utility? Give reasons for your answer.
- (c) What can you say about Anjali's and Aditya's respective indifference curve maps? 6

अंजली का उपयोग फलन यह है :

$$U = 3 \log x + 2 \log y$$

जिसमें x और y , x और y का साप्ताहिक खपत स्तर है । बाज़ार मूल्य $P_x = ₹ 2$ और $P_y = ₹ 1$ तथा उसका साप्ताहिक बजट $B = ₹ 100$ है ।

- (क) अपने उपयोग को अधिकतम बनाने के उद्देश्य से अंजली को प्रति सप्ताह कितनी मात्राएँ खरीदनी चाहिए, ज्ञात कीजिए ।
- (ख) आदित्य का उपयोग फलन $u = x^3 y^2$ । उसका साप्ताहिक बजट भी ₹ 100 है और वह अंजली की तरह उसी बाज़ार से खरीदारी करता है और इसलिए उसे समान कीमतें मिलती हैं । बगैर आगे परिकलन किए क्या आप उन मात्राओं को बता सकते हैं जो आदित्य अपने उपयोग को अधिकतम करने के लिए खरीदेगा । अपने उत्तर के लिए कारण दीजिये ।
- (ग) अंजली और आदित्य के अपने अनधिमान वक्र मानचित्रों के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

OR/अथवा

What is the shortest distance between the curve $xy = 1$ and the origin? 6

वक्र $xy = 1$ और उद्भव के बीच लघुत्तम दूरी क्या है ?