

[This question paper contains 12 printed pages.]

Sr. No. of Question Paper : 412

C

Roll No.....

Unique Paper Code : 227103

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics – I

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester : I

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

### Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are six questions in all.
3. All questions are compulsory.
4. Simple calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or in Hindi; same medium must be used throughout the paper.

### छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. इस प्रश्नपत्र में कुल 6 प्रश्न हैं।
3. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
4. केवल साधारण कैलकुलेटर ही प्रयोग कर सकते हैं।
5. इस प्रश्नपत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. (a) Fill in the blanks with “if”, “only if”, or “if and only if” :

(i)  $4x + 3 \geq 11 \dots\dots\dots x \geq 1$

- (ii) Function  $f$  is one-to-one ..... Function  $f$  is strictly increasing in its domain

P.T.O.

(iii)  $c \in D$  is a maximum point for a function  $f \dots \dots f(x) \leq f(c)$ , for all  $x \in D$

(iv)  $x < 4 \dots \dots x^2 < 16$

(b) Determine the domain on which the equation  $y^6 = x$  defines  $y$  as a *function* of  $x$ .

(c) Find the solution set for the following inequalities :

(i)  $\frac{5}{x} > x - 4$

(ii)  $\sqrt{x+4} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} \geq \sqrt{3-x}$  (2,2,4)

OR

(a) Suppose that  $P$  and  $Q$  are propositions. Prove that if  $P \Rightarrow Q$  is true, then  $not Q \Rightarrow not P$ .

(b) If  $x > \sqrt{xy} > y$ , deduce that  $x > y > 0$ .

(c) Solve the equation  $|7x - 5| = 0$  for  $x$ .

(d) Find the domain and range of the function;

$$y = \ln \left( \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \right) \quad (2,2,2,2)$$

(क) 'यदि', 'सिर्फ यदि' अथवा 'यदि और सिर्फ यदि' के द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i)  $4x + 3 \geq 11 \dots \dots x \geq 1$

(ii) फलन  $f$  एक से एक है ..... फलन  $f$  लगातार बढ़ रहा है ।

(iii)  $c \in D$  फलन  $f$  के लिए अधिकतम बिंदु है .....

$f(x) \leq f(c)$  सभी  $x \in D$  के लिए

(iv)  $x < 4 \dots \dots x^2 < 16$

(ख) परास निकालिए जो कि समीकरण  $y^6 = x$  में  $y$  के फलन को  $x$  के रूप में परिभाषित करता है।

(ग) निम्नलिखित असमानताओं की तुष्टि करने वाले समुच्चय हल को ज्ञात कीजिए।

$$(i) \frac{5}{x} > x - 4$$

$$(ii) \sqrt{x+4} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} \geq \sqrt{3-x}$$

अथवा

(क) माना कि  $P$  और  $Q$  प्रस्ताव है, सिद्ध कीजिए  $P \Rightarrow Q$  यदि सत्य है तो नहीं  $Q \Rightarrow$  नहीं  $P$

(ख) यदि  $x > \sqrt{xy} > y$  तो प्रमाणित कीजिए कि  $x > y > 0$

(ग) फलन  $y$  का परास एवं परिसर निकालिए -

$$y = \ln \left( \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \right)$$

2. (a) Find the equation of the line that is tangent to the circle  $x^2 + y^2 = 25$  at the point (3, 4) on the circle.
- (b) Trace the graph of  $y = 5 - (x - 1)^2$  from the graph of  $y = x^2$ .
- (c) For what values of  $x$  does the following limit exist ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^n}{1 + x^n}$$

Draw a graph that plots the value of the limit against these values of  $x$ .

(4,5,6)

OR

- (a) Draw the graph of:  $|x| + |y| = 10$
- (b) Find all possible integer roots of the equation :

$$2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$$

P.T.O.

(c) Calculate the limits of :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 3}{3x^2 - x - 2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \quad (6,4,5)$$

(क) रेखा का समीकरण निकालिए जो वृत्त  $x^2 + y^2 = 25$  को बिंदु  $(3,4)$  पर स्पर्श करती है।

(ख)  $y = x^2$  के ग्राफ से  $y = 5 - (x-1)^2$  के ग्राफ को प्राप्त कीजिए।

(ग) निम्नलिखित  $x$  के किन मान के लिए सीमा विद्यमान है।

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^n}{1 + x^n}$$

एक ग्राफ का अनुरेखन कीजिए, जो कि सीमा के मान तथा  $x$  के मान के संबंध को दर्शाता है।

अथवा

(क)  $|x| + |y| = 10$  के ग्राफ को अनुरेखित कीजिए।

(ख) समीकरण के संभव पूर्णांक मूलों को ज्ञात कीजिए।

$$2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$$

(ग) सीमाएं निकालिए :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 3}{3x^2 - x - 2}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

3. (a) Determine a polynomial whose roots are 4, 1, and -5.

(b) Let  $y(t)$  be the real income at time  $t$  with  $y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)}$ , where  $Y(t)$  represents

the nominal income at time  $t$  and  $P(t)$  represents the price level at time  $t$ . How is the proportional rate of growth of real income related to the proportional rate of growth of nominal income ?

- (c) For what value(s) of  $x$  does the function  $f(x)$  attain maximum and/or minimum value(s) if :

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 4x)(x-4)^3(x-5)^4$$

- (d) If  $y = \ln(1+x)$ ,  $x > -1$ , show using mathematical induction that :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \quad (2,3,5,5)$$

OR

- (a) Examine the discontinuity (or discontinuities) of the function :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

Is the discontinuity (or discontinuities) removable ?

- (b) Let  $P = f(Q)$  denote the inverse demand function for a product, where  $P$  is the price and  $Q$  is the quantity demanded of the product. Further, let the revenue function  $R(Q)$  be given by  $R(Q) = Qf(Q)$ . Show that

$$R'(Q) = f(Q) \left[ 1 + \frac{1}{\eta} \right], \text{ where } \eta = \frac{1}{f'(Q)} \frac{f(Q)}{Q} \text{ represents the (own) price elasticity of demand.}$$

- (c) If  $x^y = e^{x-y}$  and the equation defines  $y$  implicitly as a function of  $x$ , prove

$$\text{that } \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

- (d) Find the vertical and horizontal asymptotes, if any, for the following functions :

$$(i) f(x) = \frac{3-4x}{x^2+1}$$

$$(ii) g(x) = \frac{2}{(x-3)^3} \quad (4,3,4,4)$$

P.T.O.

(क) बहुपद निकालिए, जिसके मूल्य 4, 1, तथा -5. है।

(ख) माना  $y(t) = \frac{Y(t)}{P(t)}$  समय  $t$  पर वास्तविक आय है जहां  $Y(t)$  समय  $t$  पर मौद्रिक आय को प्रदर्शित

करता है तथा  $P(t)$  समय  $t$  पर मूल्य स्तर को प्रदर्शित करता है। किस प्रकार वास्तविक आय में अनुपातिक वृद्धि दर मौद्रिक आय में अनुपातिक वृद्धि दर से संबंध को दर्शाती है।

(ग)  $x$  के किन मूल्यों के लिए फलन  $f(x)$  अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्य प्राप्त करता है यदि

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 4x)(x-4)^3(x-5)^4$$

(घ) यदि  $y = \ln(1+x)$ ,  $x > -1$  तो गणितीय प्रेरण विधि का प्रयोग करके दर्शायें

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

अथवा

(क) निम्नलिखित फलन की असततता/असततताओं का मूल्यांकन कीजिए;

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

क्या असततता/असततताएं दूर की जा सकती है? स्पष्ट करें कि क्यों अथवा क्यों नहीं?

(ख) यदि  $P = f(Q)$  एक वस्तु के प्रतिलोम मांग फलन को प्रदर्शित करता है जहां  $P$  कीमत है तथा  $Q$  मांग की मात्रा है। माना आगम फलन  $R(Q)$  दिया है; अर्थात्  $R(Q) = Qf(Q)$  तो दर्शाये कि

$$R'(Q) = f(Q) \left[ 1 + \frac{1}{\eta} \right],$$

जहां,  $\eta = \frac{1}{f'(Q)} \frac{f(Q)}{Q}$  कीमत लोच को दर्शाती है।

(ग) यदि  $x^y = e^{x-y}$  तथा समीकरण में  $y, x$  का अंतः परिभाषित फलन है, तो दर्शाये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

(घ) निम्नलिखित फलनों की क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर अंतरस्पर्शिया ज्ञात कीजिए, यदि हैं तो

$$(i) f(x) = \frac{3-4x}{x^2+1}$$

$$(ii) g(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

4. (a) Suppose demand ( $q$ ) is given by  $q(p) = 100 + 4p - 0.5p^2$ ,  $p \geq 4$ , and demand is to be approximated by a linear function. If  $p = 8$ , what is the linear approximation that you would use? Sketch a graph of both  $q(p)$  and its linear approximation. Where, on the graph, do you see the best fit?
- (b) Let  $f$  be a continuous function on  $[0, 1]$ . Show that if  $-1 \leq f(x) \leq 1$  for all  $x \in [0, 1]$ , then there exists a  $c \in [0, 1]$  such that  $[f(c)]^2 = c$ .
- (c) Examine for concavity/convexity the function :

$$f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4 + 10$$

Also find the point(s) of inflection, if any. (5,4,5)

OR

- (a) Test for convergence :

$$(i) \text{ the series } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

$$(ii) \text{ the sequence } s_n = \frac{1}{2^n}$$

- (b) Verify that for the curve  $y = px^2 + qx + r$  ( $p, q, r \in \mathbb{R}; p \neq 0$ ), the chord joining the points for which  $x = a$  and  $x = b$  is parallel to the tangent at the point  $x = \frac{1}{2}(a+b)$ .

(c) Let  $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$ . Does this function have an inverse? Sketch both  $f(x)$  and its inverse (if it exists). Show both curves in one graph.

(d) Sketch a graph of  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  by examining its first-order and second-order derivatives. (4,4,4,2)

(क) माना मांग ( $q$ ) निम्नलिखित फलन द्वारा दिया गया है।

$q(p) = 100 + 4p - 0.5p^2, p \geq 4$ , तथा मांग, रेखीय फलन द्वारा अनुमानित की गई है यदि  $p = 8$  है तो आप किस रेखीय सन्निकटन को प्रयोग करेंगे।  $q(p)$  तथा इसके रेखीय सन्निकटन को ग्राफ के द्वारा प्रदर्शित करें। अनुमानित मूल्य कहां पर सबसे अच्छा होगा।

(ख) माना कि अंतराल  $[0, 1]$  में  $f$  एक सतत फलन है। दर्शाये कि यदि  $-1 \leq f(x) \leq 1$  प्रत्येक  $x \in [0, 1]$  के लिए है तो एक  $c \in [0, 1]$  मौजूद है जिसके लिए  $[f(c)]^2 = c$ .

(ग) निम्नलिखित फलन की अवतलता एवं उत्तलता का परीक्षण कीजिए

$$f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4 + 10$$

नति परिवर्तन (यदि कोई हैं तो) बिंदु ज्ञात कीजिए।

अथवा

(क) अभिसरण की जांच कीजिए

(i) श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$

(ii) अनुक्रम  $s_n = \frac{1}{2^n}$

(ख) वक्र  $y = px^2 + qx + r$  ( $p, q, r \in \mathbb{R}; p \neq 0$ ) के लिए जांच कीजिए कि जो रेखा दो बिंदुओं

$x = a$  तथा  $x = b$  को जोड़ती है वह रेखा बिंदु  $x = \frac{1}{2}(a+b)$  पर स्पर्श रेखा के समांतर

है।



(ग) माना  $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$ , क्या यह फलन प्रतिलोम फलन रखता है। फलन  $f(x)$  एवं इसके प्रतिलोम फलन (यदि है तो) को ग्राफ द्वारा निरूपित कीजिए। दोनों वक्रों को एक ग्राफ द्वारा दर्शावें।

(घ) प्रथम एवं द्वितीय क्रम अवकलन से ज्ञात करते हुए फलन  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  का अनुरेखन कीजिए।

5. Attempt any three :

(a) Find all the local maxima and/or minima of the function  $f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}$ . Does the function have any global extreme point(s)? Why or why not?

(b) Suppose that the population of deer on an island is modeled by the function :

$$P(t) = \frac{1}{L + Ae^{\alpha t}}, \quad L, A > 0; \alpha < 0$$

Show that the function has no stationary points. Also show that the curve representing this function has a point of inflection, and indicate its shape.

(c) A monopolist faces the demand curve  $q = p^{-\beta}, q > 0$ . The cost function is  $c(q) = q^2$ . What restriction(s) must be placed on  $\beta$  for a profit-maximizing solution to exist? Given the restriction(s) on  $\beta$ , what is the profit-maximizing output?

(d) Suppose that a function  $f(x)$  is convex. What restrictions on the parameters "a" and "b" will guarantee that  $g(x) = af(x) + b$  is also convex if;

(i)  $f$  is twice continuously differentiable

(ii)  $f$  is continuous but not differentiable everywhere.

Explain your answer.

(5,5,5)

किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) फलन  $f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}$  के सभी स्थानीय अधिकतम/न्यूनतम बिंदु निकालिए। क्या फलन कोई व्यापक अधिकतम बिंदु रखता है? क्यों या क्यों नहीं।

(ख) माना हिरन की जनसंख्या एक द्वीप पर निम्नलिखित कथन द्वारा प्रदर्शित की गई है

$$P(t) = \frac{1}{L + Ae^{\alpha t}}, \quad L, A > 0; \alpha < 0$$

दर्शाये कि फलन का कोई स्तब्ध बिंदु नहीं है। यह भी दर्शाये कि फलन द्वारा प्रदर्शित ग्राफ नति परिवर्तन बिंदु को प्रदर्शित करता है तथा इसकी आकृति को इंगित करे।

(ग) एकाधिकारी का मांग फलन  $q = p^{-\beta}$ ,  $q > 0$  है एवं लागत फलन  $c(q) = q^2$  है।  $\beta$  पर निर्बाध को दीजिए जिससे अधिकतमीकरण लाभ मौजूद है। लाभ अधिकतमीकरण उत्पादन क्या है ?

(घ) माना फलन  $f(x)$  उत्तल है। पैरामीटर  $a$  तथा  $b$  के लिए क्या निर्बाध होंगे कि फलन  $g(x) = af(x) + b$  भी उत्तल हो। यदि

(i) फलन  $f(x)$  दो बार सतत अवकलज है

(ii) फलन  $f(x)$  सतत है पर अवकलज नहीं है। व्याख्या कीजिए।

6. (a) Calculate :

(i)  $Q(L)$ , where  $Q'(L) = 6L^{1/3}$  and  $Q(0) = 0$

(ii)  $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} e^{-u^2} du$

(b) Suppose the behavior of the tiger population, post introduction of the Save the Tiger Campaign, is governed by the difference equation :

$$x_t = ax_{t-1} + 24, \quad x_0 = 5,$$

where  $x_t$  denotes the population of tigers at time  $t$ . Find the number of tigers in the equilibrium-state and sketch a (rough) graph of  $x_t$  for

(i)  $a = 0.2$ , and

(ii)  $a = -0.2$ .

Classify the time path obtained in each case as convergent/divergent and oscillatory/non-oscillatory. (4,4)

OR

- (a) Find the area of the region between the curve  $y = 2x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$  and the x-axis.
- (b) Suppose the supply and demand curves for potatoes are, respectively, given by :

$$Q_{st} = -4 + 2P_{t-1}, \text{ and}$$

$$Q_{dt} = 6 - P_t,$$

where  $Q_{st}$  and  $Q_{dt}$  represent the quantity supplied and quantity demanded of potatoes at time  $t$ , and  $P_t$  represents price in period  $t$ .

- (i) Using the equilibrium condition  $Q_{dt} = Q_{st}$ , write down the equation that represents the time path of price.
- (ii) Find the steady-state price.
- (iii) Suppose the initial price is  $p_0 = 4$ . Illustrate graphically the time path of price. Is the time path convergent or divergent ?

(Note : The steady-state price is the same as the price at which the demand curve intersects the supply curve) (4,4)

(क) ज्ञात कीजिए :

(i)  $Q(L)$ , जहाँ  $Q'(L) = 6L^{1/3}$  तथा  $Q(0) = 0$

(ii)  $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} e^{-u^2} du$

(ख) चीता बचाओ अभियान के बाद माना चीतों की जनसंख्या का व्यवहार निम्न अंतर समीकरण के द्वारा निकाला गया है  $x_t = ax_{t-1} + 24$ ,  $x_0 = 5$ , जहाँ  $x_t$ ,  $t$  समय पर चीता की जनसंख्या को प्रदर्शित करता है। संतुलन की दशा में चीतों की संख्या ज्ञात कीजिए तथा  $x_t$  के लिए एक ग्राफ का निरूपण कीजिए जब (i)  $a = 0.2$ , तथा (ii)  $a = -0.2$  परिसरण, अभिसरण तथा उच्चावचन के संदर्भ में समय पथ को वगीकृत कीजिए।

अथवा

(क) वक्र  $y = 2x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 3$  तथा x-अक्ष के मध्य क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ख) माना आलू की पूर्ति एवं मांग फलन निम्नलिखित है

$$Q_{st} = -4 + 2P_{t-1}, \text{ तथा}$$

$$Q_{dt} = 6 - P_t,$$

जहां  $Q_{st}$  तथा  $Q_{dt}$   $t$  समय पर आलू की पूर्ति मात्रा तथा मांग की मात्रा को प्रदर्शित करते हैं तथा  $P_t$   $t$  समय पर आलू की कीमत है।

- (i) संतुलन की शर्त का प्रयोग करते हुए एक समीकरण लिखिए जो कि कीमत समय पथ को प्रदर्शित करे।
- (ii) स्थिर अवस्था कीमत निकालिए।
- (iii) माना आरंभिक कीमत  $p_0 = 4$  है तो कीमत समय पथ को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए। क्या समय पथ संसृत अथवा असंसृत है।

(नोट: संतुलित कीमत वही है जो कीमत मांग एवं पूर्ति वक्र के प्रतिच्छेन बिंदु से प्राप्त होती है।)