

This question paper contains 16 printed pages]

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

S. No. of Question Paper : 7027

Unique Paper Code : 227103

D

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics-I**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **I**

Duration: **3 Hours**

Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

Simple calculator is allowed.

There are six questions in all.

All questions are compulsory.

केवल साधारण कैलकुलेटर ही प्रयोग कर सकते हैं ।

कुल छः प्रश्न दिए गए हैं ।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

1. (a) If $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = \sqrt{2-x}$, find the following functions and their domain :

(i) $f(g(x))$

(ii) $f(x) \cdot g(x)$.

P.T.O.

(b) Solve the inequalities :

$$(i) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1} < 0$$

$$(ii) |x + 1| > 2.$$

4,4

(क) यदि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = \sqrt{2-x}$, तो निम्नलिखित फलनों को ज्ञात कीजिये तथा उनका परास निकालिये :

$$(i) f(g(x))$$

$$(ii) f(x) \cdot g(x).$$

(ख) निम्नलिखित असमानताओं को हल कीजिये :

$$(i) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1} < 0$$

$$(ii) |x + 1| > 2.$$

Or

(अथवा)

(a) State which of these are functions giving their domain and range :

$$(i) y = -\sqrt{4 - x^2}$$

$$(ii) |y| = x.$$

(b) Solve for x :

$$|5x - 8| \leq 12.$$

(c) Trace the graph of $g(x) = \sqrt{x-2}$ from the graph of $f(x) = \sqrt{x}$. 4,2,2

(क) निम्नलिखित में से फलन कौनसे हैं, उनका परास एवं परिसर ज्ञात कीजिये :

(i) $y = -\sqrt{4-x^2}$

(ii) $|y| = x.$

(ख) x के लिये हल कीजिये :

$$|5x - 8| \leq 12.$$

(ग) $f(x) = \sqrt{x}$ के ग्राफ की सहायता से $g(x) = \sqrt{x-2}$ के ग्राफ को व्युत्पन्न कीजिये ।

2. (a) Find the asymptotes if any :

(i) $y = xe^{-2x}$

(ii) $y = \frac{5x^2 - 10x}{x+1}.$

(b) Find :

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - x^3}{x^2 - 16}.$

(c) Suppose the population $P(t)$ of a species grows exponentially so that :

$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

where $P(0)$ is the initial population, t is the number of years and r is a positive constant.

(i) If the population doubles in n years, find n .

(ii) Show that the above function can be written as $P(t) = P(0)2^{\frac{t}{n}}$.

(d) Find the 2nd degree Taylor polynomial centered at $x = 0$ for :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

4,4,4,3

(क) निम्नलिखित फलनों के अनंतस्पर्शियों को ज्ञात कीजिये, यदि विद्यमान हैं :

(i) $y = xe^{-2x}$

(ii) $y = \frac{5x^2 - 10x}{x + 1}$

(ख) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिये, यदि ये विद्यमान हैं :

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - x^3}{x^2 - 16}$

(ग) मना कि एक प्रजाति की जनसंख्या $P(t)$ चरघातांकीय रूप से (exponentially) निम्न फलन के अनुसार बढ़ रही है :

$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

जहाँ $P(0)$ आरंभिक जनसंख्या है, t वर्षों की संख्या है तथा r धनात्मक स्थिरांक है ।

- (i) यदि जनसंख्या n वर्षों में दुगुनी हो जाती है तो n का मान ज्ञात कीजिये ।
- (ii) इस परिणाम को प्रयोग करते हुए दर्शाइये कि उपर्युक्त फलन को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$P(t) = P(0)2^{\frac{t}{n}}$$

(घ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ के लिये $x = 0$ के आसपास द्वितीय क्रम टेलर सन्निकटन ज्ञात कीजिये ।

Or

(अथवा)

(a) Evaluate the limits :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{1+x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

- (b) Suppose you own an asset whose market price t years from now is given by :

$$V(t) = 10,000e^{\sqrt{t}}$$

If the prevailing rate of interest is 8% compounded continuously, when should the asset be sold ?

- (c) If the demand curve is :

$$D(p) = \frac{100}{p^{3/2}},$$

show that the price elasticity of demand is a constant.

- (d) Find the second degree Taylor polynomial of $f(x) = \sqrt{x}$ at $x_0 = 4$. Use it to approximate $\sqrt{5}$. Calculate the Lagrange Remainder. 4,4,2,5

- (क) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिये, यदि ये विद्यमान हैं :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt[4]{1+x}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

- (ख) माना कि आपके पास सम्पत्ति है, जिसका बाजार में मूल्य t वर्षों में :

$$V(t) = 10,000e^{\sqrt{t}}$$

है । यदि वर्तमान सतत् चक्रवृद्धि ब्याज दर 8% है तो इस सम्पत्ति को कब बेचना उचित है ?

(ग) यदि माँग वक्र :

$$D(p) = \frac{100}{p^{3/2}},$$

है तो दर्शाइये कि माँग की कीमत लोच स्थिर है ।

(घ) $f(x) = \sqrt{x}$ के लिये $x_0 = 4$ के आसपास द्वितीय क्रम टेलर सन्निकटन ज्ञात कीजिये । इसकी सहायता से $\sqrt{5}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिये । लाग्रेंज शेषफल भी ज्ञात कीजिये ।

3. (a) (i) Show that the n th derivatives of $f(x) = xe^{-x}$ with respect to x is $(-1)^n (x - n) e^{-x}$.

(ii) Find the polynomial with integer coefficients having roots at 3, -5, -1 and passing through (-2, 15).

(b) Show that $f(x) = \left[(x-2)^2 \right]^{\frac{1}{3}}$ is continuous at $x = 2$ but not differentiable at $x = 2$.

(c) Find the inverse of $f(x) = \ln(2x - 1)$. Also find $g'(0)$ where g is the inverse of f . 4,5,5

(क) (i) दर्शाइये कि $(-1)^n (x - n) e^{-x}$, $f(x) = xe^{-x}$ का x के सापेक्ष n क्रम का अवकलज है ।

(ii) पूर्णांक गुणांक वाला वह बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके मूल 3, -5, -1 हैं तथा (-2, 15) से गुजरता है ।

(ख) दर्शाइये कि $f(x) = [(x-2)^2]^{1/3}$ $x = 2$ पर सतत् है, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है ।

(ग) $f(x) = \ln(2x - 1)$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये । $g'(0)$ भी ज्ञात कीजिये जहाँ g, f का प्रतिलोम है ।

Or

(अथवा)

(a) Find the intervals in which the inverse of the function $f(x)$ is defined :

$$f(x) = -x^3 + 2x + 1.$$

Find $g'(2)$, where g is the inverse of f .

(b) Given :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 4 - 3x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Is f continuous at $x = 1$?

Is f differentiable at $x = 1$?

(c) If $a > 0$ is a constant, show that the function $f(x) = x^3 + ax - 1$ has exactly one real root.

(d) Find the slope of the tangent to the curve $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ where $x = a$. Find equations of the tangent lines at the points $(1, 1)$ and $(4, 1/2)$.

(क) वह अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ फलन $f(x)$ का प्रतिलोम $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ परिभाषित है तथा $g'(2)$ ज्ञात कीजिये जहाँ g, f का प्रतिलोम है ।

(ख) यदि

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 4 - 3x, & x \geq 1 \end{cases}$$

क्या $f, x = 1$ पर सतत् है ?

क्या $f, x = 1$ पर अवकलनीय है ?

(ग) यदि $a > 0$ एक स्थिरांक है तो दर्शाइये कि फलन $f(x) = x^3 + ax - 1$ का ठीक एक वास्तविक मूल है ।

(घ) वक्र $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ की $x = a$ पर स्पर्श रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए । बिंदुओं $(1, 1)$ तथा $(4, 1/2)$ पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये ।

4. Attempt any three :

(a) (i) For what values of r is the sequence $\{r^n\}$ convergent.

(ii) Show that the sequence $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$ is decreasing for $n \geq 1$.

- (b) (i) The concentration C of a medicine in the blood stream t hours after it is taken, is given by :

$$C(t) = \frac{K}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \quad t \geq 0$$

where $a, b (b > a)$ and K are positive constants. At what time does the largest concentration occur ? Find the limit of C as $t \rightarrow \infty$.

- (ii) Show that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$$

diverges.

- (c) Suppose the demand function for a certain commodity is :

$$P = \frac{b-x}{a} \quad \text{for } 0 \leq x \leq b$$

where a and b are positive constants.

- (i) Find the total revenue ($= Px$) function. Find the intervals where the function is increasing/decreasing.
- (ii) Graph the total revenue function and the demand function for $x \geq 0$.
- (d) Find two non-negative numbers whose sum is 9, and the product of one number and the square of the other number is a maximum.

किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

(क) (i) r के किन मानों के लिये अनुक्रम $\{r^n\}$ संसृत है ?

(ii) दर्शाइये कि अनुक्रम $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$, $n \geq 1$ के लिये ह्रासमान है ।

(ख) (i) एक दवा लेने के t घंटों बाद रक्त में दवा का संग्रहण C , निम्न प्रकार दिया गया है :

$$C(t) = \frac{K}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \quad t \geq 0$$

जहाँ $a, b (b > a)$ तथा K धनात्मक स्थिरांक हैं । किस समय पर रक्त में दवा का संग्रहण अधिकतम होगा ? C की सीमा ज्ञात कीजिये जब $t \rightarrow \infty$ ।

(ii) दर्शाइये कि श्रेणी :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$$

असंसृत है ।

(ग) माना कि किसी वस्तु का माँग फलन है :

$$P = \frac{b-x}{a} \quad 0 \leq x \leq b \text{ के लिये}$$

जहाँ a तथा b धनात्मक स्थिरांक हैं ।

(i) कुल आगम (total revenue = Px) फलन ज्ञात कीजिये । वे अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ यह फलन ह्रासमान है/वर्धमान है ।

(ii) $x \geq 0$ के लिये कुल आगम फलन तथा माँग फलन का ग्राफ बनाइये ।

(घ) दो अऋणात्मक अंक ज्ञात कीजिये जिनका योग 9 है, एक अंक का गुणक तथा दूसरे का वर्ग अधिकतम है ।

5. Attempt any *three* :

(a) Determine where the function :

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

is concave and/or convex. Find the local maxima, minima and inflection points, if any.

Sketch the graph.

(b) (i) Find constants A, B and C that guarantee that the function :

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$$

will have a local extreme at (2, 11) and an inflection point at (1, 5). Sketch the graph of f .

(ii) Find the point on the parabola $y = 2x^2$ that is closest to the point (1, 4).

(c) Show that the function :

$$y = |x - 2|$$

is convex from below in the interval (1, 5).

(d) A monopolist has the following cost and demand function :

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P = \beta - \alpha x$$

where $C(x)$ and P and x are total cost, price and quantity respectively and a, b, c, α and β are positive constants. Determine the profit maximizing output. The government imposes a tax of t per unit. Find the tax rate that will maximize tax revenue. 5,5,5

किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

(क) ज्ञात कीजिये कि फलन :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

कहाँ अवतल तथा/अथवा कहाँ उत्तल है । स्थानीय उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ तथा नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिये । ग्राफ बनाइए ।

(ख) (i) वे स्थिरांक A, B तथा C ज्ञात कीजिये जिनसे फलन :

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$$

का स्थानीय चरम बिन्दु $(2, 11)$ पर है तथा नति परिवर्तन बिन्दु $(1, 5)$ पर है । f का ग्राफ बनाइये ।

(ii) परवलय (parabola) $y = 2x^2$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिये जो बिन्दु $(1, 4)$ के निकटतम है ।

(ग) दर्शाइये कि फलन :

$$y = |x - 2|$$

अंतराल (1, 5) में उत्तल है ।

(घ) एक एकाधिकारी के लागत एवं माँग फलन निम्नलिखित हैं :

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P = \beta - \alpha x$$

जहाँ $C(x)$, P तथा x क्रमशः कुल लागत, कीमत तथा उत्पादन की मात्रा हैं । a , b , c , α तथा β धनात्मक स्थिरांक हैं । अधिकतम लाभ के लिये उत्पादन की मात्रा ज्ञात कीजिये । सरकार t प्रति इकाई कर लगाती है जो एकाधिकारी अपनी लागत में जमा कर लेता है । कर की वह दर निकालिये जो कर आगम को अधिकतम करती है ।

6. (a) Find the total area between the curve $y = 1 - x^2$ and the x -axis over the interval $[0, 2]$.
- (b) Solve the difference equation :

$$x_t + 3x_{t-1} + 8 = 0 \text{ and } x_0 = 16.$$

Comment on the nature of the time path.

4.4

- (क) वक्र $y = 1 - x^2$ तथा x -अक्ष के मध्य का, अंतराल $[0, 2]$ में, कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।
- (ख) निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल कीजिये तथा इसके समय-पथ की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिये :

$$x_t + 3x_{t-1} + 8 = 0 \text{ तथा } x_0 = 16.$$

Or

(अथवा)

- (a) (i) A manufacturer estimates that the marginal revenue of a certain commodity as :

$$R'(x) = 240 + 0.1x$$

when x units are produced. Find the demand function $P(x)$.

- (ii) Solve :

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{t^4 + 1}{t^2 + 1} dt.$$

- (b) Determine the market price P_t in any time period, the equilibrium price P_e and the stability of the time path :

$$Q_{dt} = 180 - 0.75P_t$$

$$Q_{st} = -30 + 0.3P_{t-1}$$

$$P_0 = 220.$$

5,3

- (क) (i) एक उत्पादक किसी वस्तु के सीमांत आगम को निम्नानुसार आंकलित करता है :

$$R'(x) = 240 + 0.1x$$

जब x इकाइयाँ उत्पादित की जाती हैं । माँग फलन $P(x)$ ज्ञात कीजिये ।

- (ii) हल कीजिये :

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{t^4 + 1}{t^2 + 1} dt.$$

(ख) निम्न समीकरण निकाय हेतु किसी समय पर बाजार कीमत P_t , संतुलन कीमत P_e व समय पथ की स्थिरता ज्ञात कीजिये :

$$Q_{dt} = 180 - 0.75P_t$$

$$Q_{st} = -30 + 0.3P_{t-1}$$

$$P_0 = 220.$$

Or

(अथवा)

(a) Under what restrictions on a and b will the function :

$$g(x) = af(x) + b$$

be concave if $f(x)$ is a concave function ?

(b) Show that if $f(x) = x^4$, then $f''(0) = 0$, but $(0, 0)$ is not an inflection point on the graph. 4,4

(क) यदि $f(x)$ अवतल फलन है तो a तथा b पर किन प्रतिबंधों के अधीन फलन :

$$g(x) = af(x) + b$$

अवतल है ?

(ख) दर्शाइये कि यदि $f(x) = x^4$, तो $f''(0) = 0$ है पर $(0, 0)$ नति परिवर्तन बिन्दु नहीं है ।