

This question paper contains 16 printed pages]

Your Roll No. ....

6302

3500

B.A. (Hons.)/I Sem.

B

ECONOMICS : Paper 02

(Mathematical Methods for Economics)

(Admissions of 2011 onwards)

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 75

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :— इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

1. (a) Find all real numbers  $x$  that satisfy the following inequalities :

(i)  $1/x < x^2$

(ii)  $1 < x^2 < 4$ .

(b) Is the rule that assigns to each of the 50 students in a class her marks out of a maximum of 100 marks a function ? If yes, is the function one-to-one ? 3

(c) Find the restrictions on  $a$ ,  $b$  and  $c$  for which :

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

for all  $x$ .

4

(a) निम्नलिखित असमानताओं की तुष्टि करने वाली सभी वास्तविक संख्याओं को ज्ञात कीजिए :

(i)  $1/x < x^2$

(ii)  $1 < x^2 < 4$

(b) कक्षा के 50 छात्रों में से प्रत्येक को अधिकतम 100 अंकों में से अंक देने का नियम एक फलन है ? यदि है, तो क्या यह फलन एक के लिए एक है ?

(c)  $a$ ,  $b$  और  $c$  के लिए प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जिनके सभी  $x$  के लिए  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

- (a)  $f(x)$  की सीमा  $x \rightarrow 1$  के रूप में ज्ञात कीजिए। क्या यह फलन  $x = 1$  पर सतत है ? साथ ही फलन का ग्राफ खींचिए। मान लीजिए कि :

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & , x > 1 \\ 1 & , x = 1 \\ 2x & , x < 1 \end{cases}$$

- (b) निम्नलिखित श्रृंखला के  $n$  पदों का योग ज्ञात कीजिए और इसके अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\ln 1/2 + \ln 2/3 + \ln 3/4 + \dots$$

$$+ \ln n/(n+1) + \dots$$

Or

(अथवा)

- (a) Evaluate the following limits :

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

- (b) An investment of 50,000 at present yields 6,000 every year indefinitely. If the interest is compounded annually @ 10%, is this investment worthwhile ? Explain. 5

(a) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए :

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

- (b) वर्तमान में 50,000 का निवेश अनिश्चित रूप में प्रति वर्ष 6,000 की प्राप्ति करता है। यदि ब्याज को वार्षिक रूप में 10% की दर से मिश्रित किया जाता है, तो क्या यह निवेश लाभप्रद है ? व्याख्या कीजिए।

3. (a) The elasticity of  $Y = f(x)$  with respect to  $x$  is  $e$ . Find the elasticity of the total function  $xf(x)$  and the average function  $f(x)/x$  in terms of  $e$ . Also find the value/values of  $e$  for which :

(i) the total function and

(ii) the average function can have a maximum. 5

- (b) Examine the sign of first and second derivatives of the following function and indicate the shape of the curve and sketch a graph of :

$$f(x) = x^2 + \ln x, \quad x > 0. \quad 5$$

- (a)  $Y = f(x)$  की  $x$  के संदर्भ में प्रत्यास्थता  $e$  है। कुल फलन  $f(x)$  की प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए और  $f(x)/x$  का  $e$  के पदों में औसत फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही  $e$  का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए :

(i) कुल फलन और

(ii) औसत फलन अधिकतम हो सकते हैं।

- (b) निम्नलिखित फलन के प्रथम और द्वितीय व्युत्पन्नों के चिह्न की जांच कीजिए और वक्र की शकल को बताइए। इसका ग्राफ खींचिए :

$$f(x) = x^2 + \ln x, \quad x > 0.$$

Or

(अथवा)

- (a) Find the elasticity of  $f(x)$  with respect to  $x$  given :

$$f(x) = (ax^2 + bx).$$

How does the elasticity change as  $x$  increases ? 5

- (b) Examine the sign of first and second derivatives of the following function and indicate the shape of the curve.

Sketch a graph of :

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \quad 5$$

- (a)  $x$  के संदर्भ में  $f(x)$  की प्रत्यास्थता ज्ञात कीजिए जबकि :

$$f(x) = (ax^2 + bx).$$

दिया गया है। जैसे-जैसे  $x$  बढ़ता जाता है प्रत्यास्थता

कैसे बदलती जाती है ?

- (b) निम्नलिखित फलन के प्रथम और द्वितीय व्युत्पन्नों के चिह्न की जाँच कीजिए और वक्र की शकल को बताइए।  
इसका ग्राफ खींचिए :

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

4. (a) Let

$$f(x) = \frac{(x^3 - 4x)}{(x^3 - x)}.$$

Find all asymptotes of  $f$ . 5

- (b) Verify the quadratic approximation :

$$1/(1-x) \approx 1 + x + x^2$$

for  $x \approx 0$  and determine its accuracy for :

$$|x| \leq 0.1. \quad 5$$

- (a) मान लीजिए कि

$$f(x) = \frac{(x^3 - 4x)}{(x^3 - x)}.$$

$f$  के सभी अंतरस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

- (b) द्विघात सन्निकटन को सत्यापित कीजिए।  $x \approx 0$  के लिए :

$$1/(1-x) \approx 1+x+x^2$$

और  $|x| \leq 0.1$

के लिए इसकी यथार्थता का निर्धारण कीजिए।

Or

(अथवा)

- (a) Use Newton's binomial formula (with  $n = 2$ ) to calculate an approximate value of  $(28)^{1/3}$ . Comment on the value of the remainder. 5
- (b) The total cost of producing  $x$  units of a product is given by the function :

$$TC = 10x^2 + 200x + 6000 \quad 0 \leq x \leq 15$$

The number of units sold at a price of Rs.  $p$  per unit is given by :

$$x = \frac{(1000 - p)}{10}$$

For what values of  $x$  will the profit be positive ? How many units should be produced for maximum profits ? 5



(a)  $(28)^{1/3}$  के सन्निकटन मान का परिकलन करने के लिए न्यूटन के द्विपद सूत्र ( $n = 2$  के साथ) का प्रयोग कीजिए। शेष के मान पर टिप्पणी कीजिए।

(b) एक उत्पाद की  $x$  यूनिटों को तैयार करने की कुल लागत इस फलन से प्राप्त होती है :

$$TC = 10x^2 + 200x + 6000 \quad 0 \leq x \leq 15$$

$p$  रु. प्रति यूनिट कीमत पर बेची गई यूनिटों की संख्या इससे ज्ञात होती है :

$$x = \frac{(1000 - p)}{10}$$

$x$  के किस मान के लिए लाभ धनात्मक होगा ? अधिकतम लाभ के लिए कितनी यूनिटों को तैयार करना चाहिए ?

5. Attempt any three :

5×3

(a) Show that the equation :

$$x^3 = x^2 + 5$$

has at least one solution.

P.T.O.

- (b) The following function defines total cost of producing  $Q$  units of output :

$$TC = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d \quad Q > 0.$$

What restrictions must be imposed on  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$ , if any, such that the corresponding marginal cost curve is positive at its minima ?

- (c) Find

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ if } 2x^3 - 3y^2 = 7.$$

- (d) Let  $f$  be defined on

$$[0, 5] \text{ by } f(x) = x^2.$$

Show that  $f$  has an inverse function  $g(x)$ . Draw graphs of  $f$  and  $g$ . How are the two graphs related ?

किन्हीं तीन को कीजिए :

- (a) प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण :

$$x^3 = x^2 + 5$$

का रूप में एक एक हल है।

- (d) Suppose the value of timber planted on some land is the following function of time :

$$f(t) = Ke^{\sqrt{t}}$$

An initial cost of  $C$  is incurred at time period  $t = 0$ .

What is the optimum time to cut timber for sale assuming zero upkeep cost ? Assume that the interest rate is 10% per.

किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (a) मान लीजिए कि

$$f(x) = x^a + b \quad (x > 0)$$

$a$  का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए :

- (i)  $f$  अवतल है
- (ii)  $f$  उत्तल है।
- (b)  $f(x) = x^{1/3}$  के लिए नतिपरिवर्तन बिंदु यदि हो तो ज्ञात कीजिए।

- (c) किसी बिंदु  $(x, y)$  पर वक्र की ढाल इस समीकरण से ज्ञात होती है :

$$\frac{dy}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

$x$  के किन मानों के लिए  $y$  :

(i) अधिकतम मान

(ii) न्यूनतम मान प्राप्त करता है ?

कारण समझाइए।

- (d) मान लीजिए कि किसी जमीन पर लगाए गए टिम्बर के वृक्षों का मान समय का निम्नलिखित फलन है :

$$f(t) = Ke^{\sqrt{t}}$$

$C$  की प्रारंभिक लागत  $t = 0$  कालावधि में खर्च हुई। यदि रख-रखाव की लागत शून्य है तो बिक्री के लिए टिम्बर को काटने का इष्टतम समय क्या है ? मान लीजिए कि ब्याज की दर 10% प्रति है।